

1. Axioma del infinito

1.1.

1. Demostrar que si X y Y son conjuntos inductivos, $X \cap Y$ es inductivo.
2. Más en general, demostrar que si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos inductivos, entonces $\bigcap_{i \in I} X_i$ es inductivo.

Demostración

1. Si X e Y son inductivos, se tiene que $\phi \in X$ y $\phi \in Y$, por lo tanto $\phi \in X \cap Y$. Además, para todo elemento de $X \cap Y$ se cumple que $x \in X \rightarrow S(x) \in X$ y además $x \in Y \rightarrow S(x) \in Y$, por lo tanto $x \in X \cap Y \rightarrow S(x) \in X \cap Y$.
2. Sea una familia de conjuntos inductivos $\{X_i\}_{i \in I}$ se cumple que $\phi \in X_i$ para todo $i \in I$ por definición de conjunto inductivo, por lo tanto se cumple que $\phi \in \bigcap_{i \in I} X_i$. Ahora bien, para todo elemento x de $\bigcap_{i \in I} X_i$, $x \in X_i$ para todo $i \in I$, entonces $S(x) \in X_i$ para todo $i \in I$ por la definición de conjunto inductivo, por lo tanto $x \in X_i \rightarrow S(x) \in X_i$ para todo $i \in I$, por la cual cosa $x \in \bigcap_{i \in I} X_i \rightarrow S(x) \in \bigcap_{i \in I} X_i$ de lo que se concluye que $\bigcap_{i \in I} X_i$ es un conjunto inductivo

1.2.

Demostrar que $\mathbb{N} = \bigcap \{I \subseteq A : I \text{ es inductivo}\}$, donde A es el conjunto postulado en el axioma del infinito.

Demostración

Por definición $\mathbb{N} = \{x \in A : x \in I \text{ para todo conjunto inductivo } I\}$, por lo tanto se cumple que $\mathbb{N} \subseteq I$ para todo conjunto inductivo I , es decir $\mathbb{N} \subseteq \bigcap \{I \subseteq A : I \text{ es inductivo}\}$. Sea $x \in \bigcap \{I \subseteq A : I \text{ es inductivo}\}$, $x \in I$ para todo $I \subseteq A$, por lo tanto $x \in A \wedge x \in I$ para todo I inductivo, es decir, $x \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\bigcap \{I \subseteq A : I \text{ es inductivo}\} \subseteq \mathbb{N}$ de lo que se concluye que $\mathbb{N} = \bigcap \{I \subseteq A : I \text{ es inductivo}\}$

2. Principios de Inducción

2.1.

Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ se cumple que $n \geq 1$.

Demostración

para todo par de elementos de los naturales, n, m , por tricotomía se tiene que $n < m$ o $m < n$ o $n = m$. En específico si se toma a 0 como siendo m , se cumple que, para todo número natural, $n < 0$ o $0 < n$ o $n = 0$, tomando un $n \neq 0$ es claro que $n < 0$ o $0 < n$, pero si tomamos que $n < 0$ entonces $n \in 0 = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Es decir que para todo natural, distinto de cero, se cumple que $n > 0$. Ahora,

supongamos que $n > 0 \rightarrow n \geq 1$, si tomamos que $n < 1$, es claro que $n \in \{0\}$, por lo tanto $n = 0$ y entonces $n \leq 0$. por lo tanto $n > 0 \rightarrow n \geq 1$

2.2.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < k < n + 1$.

Demostración

Supongamos que existe un k tal que $n < k < n + 1$, pero es claro que $n < k$ implica $n + 1 < k$ o $n + 1 = k$ pero $k < n + 1$ y por tricotomía esto es imposible, entonces no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < k < n + 1$.

2.3.

Sea $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la función sucesor definida por $S(n) = n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que S es una función inyectiva.

Demostración

Sea $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq m$. Supongamos que $S(n) = S(m)$, esto es, $n + 1 = m + 1$ lo que implica que $n \in m + 1$, por lo tanto $n < m$ o $n = m$, la segunda condición queda descartada por hipótesis, por tanto si $n < m$ entonces $n + 1 < m$ o $n + 1 = m$, la segunda condición vuelve a quedar descartada porque $m \neq m + 1$, pero si $n + 1 < m$ entonces $m + 1 < m$ por lo tanto se llega a una contradicción. Entonces para cuales quiera $n, m \in \mathbb{N}$, si $m \neq n$, se cumple que $S(n) \neq S(m)$, por tanto S es inyectiva.

2.4.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Demostar que existe único $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = k + 1$. Presentar dos demostraciones de este resultado, una por inducción y otra sin usar inducción.

Demostración

Inducción:

Definamos $P(n) : n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0 \rightarrow \exists! k : k + 1 = n$

Tenemos que $P(0)$ se cumple trivialmente ya que el antecedente es falso.

Si suponemos que $P(n)$ se cumple, entonces existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $k + 1 = n$. Asi sea $b = k + 1$, notar que como $b = n$, entonces $b \cup \{b\} = n \cup \{n\}$

Esto es $b + 1 = n + 1$, ahora veamos que b es único. Supongamos que existe b' tal que $b' + 1 = n + 1$, esto significa que $b' + 1 = b + 1$, luego $b' \cup \{b'\} = b \cup \{b\}$

Por el axioma de extensionalidad, entonces $b' \in b$ o $b' = b$, pero tambien implica que $b \in b'$ o $b = b'$

Supongamos entonces que $b' \in b$ y $b \in b'$, esto significa que $b' < b$ y $b < b'$. Pero ya se vio que esto implica que $b < b$, lo cual es un absurdo. Asi se tiene que $b = b'$ y por tanto b es único y $P(n + 1)$ se cumple, asi por Principio de Inducción se tiene que $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sin usar inducción:

Sea $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $n \subseteq \mathbb{N}$, o sea n es un conjunto de números naturales. Definamos n^* como:

$$n^* = \{k \in n : S(k) \notin n\}$$

Se puede ver que por inducción que $n^* \neq \emptyset$ ya que si lo fuera entonces $n = \mathbb{N}$.

Asi sea $k \in n^*$ por tricotomía $S(k) < n$ o $S(k) = n$ o $n < S(k)$. $S(k) < n$ es imposible ya que esto implicaria $S(k) \in n$, o sea $k \notin n^*$.

Si $n < S(k)$, esto implica $n \in \{k\} \cup k$, luego $n = k$ o $n \in k$, pero como $k \in n$, entonces estos son imposibles.

Así $S(k) = n$ y por tanto existe k tal que $k + 1 = n$. La prueba de unicidad es análoga a la prueba que se hizo en la demostración por inducción.

2.5.

Para $n, m \in \mathbb{N}$, demostrar que $m < n \iff m \subsetneq n$.

Demostración

1. $\implies$)

si $m < n$ entonces $\forall k \in \mathbb{N}, k < m \rightarrow k < n$ entonces $\forall k \in m, k \in n$, es decir $m \subseteq n$, más aún, $m \in n$ pero $m \notin m$ por lo tanto $m \subsetneq n$.

2. $\impliedby$)

Si $m \subsetneq n$ entonces $\forall k \in m, k \in n$, esto es $\forall k \in \mathbb{N}, k < m \implies k < n$, por tricotomía $n < m$ o $n > m$ o $n = m$, si $n = m$, $n \subseteq m$ lo cual es una contradicción, si $n < m$ se tendría que $n \subsetneq m$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $m < n$.

2.6.

Para dos números naturales m y n se tiene $m \subseteq n$ o $n \subseteq m$.

Demostración:

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un orden total, entonces se tendrán tres casos:

1. Si $n < m$, entonces $n \in m$, luego, dado $x \in n$ se tiene que $x < n$, luego $x < n < m$. Por transitividad se tiene que $x < m$, es decir, $x \in m$. Luego $n \subset m$.
2. Si $n = m$, entonces $n \subseteq m$ y $m \subseteq n$.
3. Si $m < n$, entonces $m \in n$, luego, dado $x \in m$ se tiene que $x < m$, luego $x < m < n$. Por transitividad se tiene que $x < n$, es decir, $x \in n$. Luego $m \subset n$.

Luego siempre se tendrá $m \subseteq n$ o $n \subseteq m$.

2.7.

Demostrar la recíproca de la Proposición 3.2.5. (4). Para números naturales m y n si $m + 1 \leq n$ entonces $m < n$.

Demostración:

1. Si $m + 1 < n$ entonces $m + 1 \in n$. Como $m < m + 1$, por la transitividad del orden, $m < n$.
2. Si $m + 1 = n$, entonces, como $m < m + 1$, se cumple que $m < n = m + 1$

Por lo que, Para números naturales m y n si $m + 1 \leq n$ entonces $m < n$.

2.8.

Demostrar que no existe una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n+1) < f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Por reducción al absurdo, considere que existe una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n+1) < f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $Ran(f) \subseteq \mathbb{N}$ es conjunto y es subconjunto de $\mathbb{N}$, luego, por el principio de buen orden, existe $x \in Ran(f)$ tal que $x = \min(Ran(f))$, entonces existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $f(y) = x$, pero $f(y+1) < f(y) = x$, lo cual contradice que $x = \min(Ran(f))$. Por lo que no existe una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n+1) < f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.9.

Demostrar que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, acotado superiormente, tiene elemento máximo.

Demostración

Sea A un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$, acotado superiormente, esto es $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > k$ para todo $k \in A$. Sea el conjunto $P := \{n \in \mathbb{N} : k < n \ \forall k \in A\}$, por el principio del buen orden sobre los números naturales, y como $P \neq \emptyset$, P tiene mínimo, al que denotaremos p . Sea $j \in \mathbb{N} : j+1 = p$, se cumple entonces que $a < p$ para todo $a \in A$, si y solo si $a \leq j$. En caso de que $a < j$ para todo $a \in A$ entonces $j \in P$ pero $j < p$ y $p = \min P$, por lo tanto es una contradicción, es decir que $\exists b \in A : \forall a \in A, a \leq b = j$, por lo tanto el mínimo existe y es $\min A = b = j$.

2.10.

Sea $(A, <)$ un conjunto ordenado y $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ una función tal que $f(n) < f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $n < m$ implica $f(n) < f(m)$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Demostración

Tomemos n fijo y realizando prueba por inducción respecto a m se tiene que

- $m = 0$: Se tiene que $n < 0$. Como se parte de $\mathbb{N}$ con orden total y por la definición de 0 como mínimo, entonces $n < 0$ es una contradicción y por lo tanto, $n < 0 \rightarrow f(n) < f(0)$ es verdadero.
- Se asume que se cumple para m fijo, demostrar que se cumple para $m+1$: Veamos que
 1. Por la definición de f , se tiene directamente que $f(m) < f(m+1)$.
 2. Por la hipótesis de inducción, se tiene que $f(n) < f(m)$

Es decir, por transitividad $f(n) < f(m+1)$, como se quería probar.

Como la prueba no involucra ninguna suposición sobre n , entonces es válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.11.

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y sea $P(x)$ una propiedad tal que

1. $P(n_0)$.
2. $(\forall n \geq n_0)[P(n) \rightarrow P(n+1)]$

Demostrar que $(\forall n \geq n_0)P(n)$

Demostración

Sea $I = \{n \in \mathbb{N} : n \succeq n_0 \rightarrow P(n)\}$. Por hipótesis, podemos notar que I es inductivo. Sabemos que $\mathbb{N} \subseteq I$, y así mismo, por PIM, se tiene que $I \subseteq \mathbb{N}$. Por lo tanto como $\mathbb{N} = I$, se tiene que $P(n)$ se cumple para todo $n \succeq n_0$.

2.12.

Inducción restringida. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y sea $P(x)$ una propiedad tal que

1. $P(0)$
2. $(\forall n \prec n_0)[P(n) \rightarrow P(n+1)]$.

Demostrar que $(\forall n \preceq n_0)P(n)$

Demostración

Sea $I = \{n \in \mathbb{N} : n \prec n_0 \wedge P(n)\}$. Por hipótesis, podemos notar que I es inductivo. Sabemos que $\mathbb{N} \subseteq I$, y así mismo, por PIM, se tiene que $I \subseteq \mathbb{N}$. Por lo tanto como $\mathbb{N} = I$, se tiene que $P(n)$ se cumple para todo $n \prec n_0$.

2.13.

Deducir el principio de inducción matemática (PIM) a partir de principio de inducción completa (PIC).

Solución

El principio de inducción matemática se da de la siguiente manera: Sea $P(x)$ una propiedad tal que

1. $P(0)$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})[P(n) \rightarrow P(n+1)]$

Entonces $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$.

Demostración

Se demostrará a partir de la reformulación del PIC. Se puede observar que $P(0)$ se cumple trivialmente.

3. Sucesiones

3.1.

Demostrar que la existencia del conjunto de sucesiones finitas con valores en un conjunto dado A , definido como $A^* = \text{Suc}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$, se puede garantizar mediante el esquema axiomático de separación.

Demostración

Nótese que para cualquier sucesión finita s con valores en A , se tiene que $s \subseteq \mathbb{N} \times A$, así $s \in \wp(\mathbb{N} \times A)$.

Por tanto se puede garantizar la existencia de A^* de la siguiente manera:

$$A^* = \{s \in \wp(\mathbb{N} \times A) : (\exists n \in \mathbb{N})(s \in \wp(n \times S))\}$$

4. Teoremas de Recursión para $\mathbb{N}$

4.1.

Completar los detalles de la primera demostración de la versión paramétrica del Teorema de Recursión, Teorema 3.4.2

solución

El Teorema de Recursión en su versión paramétrica es:

A, P conjuntos dados, $h : P \rightarrow A$ y $g : P \times A \times \mathbb{N} \rightarrow A$, existe una única función $f : P \times \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que

$$\begin{cases} f(p, 0) = h(p) & \forall p \in P \\ f(p, n+1) = g(p, f(p, n), n) & \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in P \end{cases}$$

Demostración A, P conjuntos dados, $h : P \rightarrow A$ y $g : P \times A \times \mathbb{N} \rightarrow A$ funciones. Se va a hacer la demostración por medio de aproximaciones de la forma que sigue. Se escoge una n -aproximación, t , tal que $t : P \times (n+1) \rightarrow A$ de la forma

$$\begin{cases} t(p, 0) = h(p) & \forall p \in P \\ t(p, k+1) = g(p, t(p, k), k) & \forall p \in P \forall k \in n \end{cases}$$

Por inducción en la segunda variable, sea $P(p, n)$ el enunciado “para cada p en P , existe una n -aproximación”. De la definición de la n -aproximación $t(p, 0)$ existe y más aún $t(p, 0) = h(p)$ para cualquier $p \in P$. Suponemos que $P(p, n)$ se cumple para n , miremos que ocurre con $P(p, n+1)$. Esto es que $t : P \times (n+1) \rightarrow A$ existe y cumple $P(p, n)$. Se define $u : P \times (n+1) + 1 \rightarrow A$ tal que cumpla

$$\begin{cases} u(p, i) = t(p, i) & \forall p \in P \quad \forall i \in (n+1) \\ u(p, n+1) = g(p, u(p, n), n) = g(p, t(p, n), n) & \forall p \in P \end{cases}$$

Por lo tanto vemos que siempre existe para cualquier $p \in P$ una n -aproximación.

sea $t : P \times n+1 \rightarrow A$ una n -aproximación y $u : P \times m+1 \rightarrow A$ una m -aproximación. por tricotomía podemos ver que $n+1 \subseteq m+1$ o $m+1 \subseteq n+1$ sin pérdida de generalidad, se supone $n+1 \subseteq m+1$. por definición se tiene que $t(p, 0) = h(p) = u(p, 0)$. Suponemos que $t(p, k) = u(p, k)$ para todo $k \in n$, al ser aproximaciones, $t(p, k+1) = g(p, t(p, k), k) = g(p, u(p, k), k) = u(p, k+1)$ para cualquier $p \in P$. Por lo tanto hemos demostrado que las aproximaciones son compatibles 2-2. Al ser compatibles 2-2, y además n -aproximaciones, coinciden el todo dominio común 2- n aproximaciones para el mismo n , es decir, las n -aproximaciones existen y son únicas.

Sea entonces t_n la n -aproximación $t : P \times n+1 \rightarrow A$ y F de la forma:

$$F := \{t_n \in \wp(P \times \mathbb{N} \times A) : t_n \text{ es aproximación}, n \in \mathbb{N}\}.$$

$f = \bigcup F$ es función ya que las funciones de F son compatibles 2-2, de modo que $\text{dom}(f) = P \times \mathbb{N}$ y $\text{rango}(f) = A$. Para f se cumple que $f(p, 0) = h(p)$ para cualquier $p \in P$ ya que $t_n(p, 0) = h(p)$ para todo $p \in P$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $t : P \times (n+1) + 1 \rightarrow A$ una $(n+1)$ -aproximación, $f(p, k) = t(p, k)$ para todo $(p, k) \in \text{dom}(f)$, en particular $f(p, n+1) = t(p, n+1) : f(p, n+1) = t(p, n+1) = g(p, t(p, n), n) = g(p, f(p, n), n)$. Ahora sea $j : P \times \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que

$$\begin{cases} j(p, 0) = h(p) & \forall p \in P \\ j(p, n+1) = g(p, j(p, n), n) & \forall n \in \mathbb{N} \forall p \in P \end{cases}$$

se cumple necesariamente que $f(p, 0) = j(p, 0) = h(p)$ para todo $p \in P$, asumimos que $f(p, n) = j(p, n)$ para cualquier $p \in P$ por lo tanto $f(p, n+1) = g(p, f(p, n), n) = g(p, j(p, n), n) = j(p, n+1)$ para todo $p \in P$. es decir $f = j$ por lo tanto la función que buscábamos existe y es única.

4.2.

Definir recursivamente la función factorial $f(n) = n!$

Solución

Gracias al Teorema de Recusión, tomando los conjuntos $A = \mathbb{N}$ y la función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(n, m) = n \cdot (m + 1)$, existe una única función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = g(f(n), n) = (n+1) \cdot f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

de esta manera queda definida la función $f(n) = n!$.

4.3.

Definir recursivamente la función exponencial m^n y justificar su existencia mediante la versión paramétrica del Teorema de Recusión.

Solución

Gracias a la versión paramétrica del Teorema de Recusión, tomando los conjuntos $P = A = \mathbb{N}$ y las funciones $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(n, m, k) = m \cdot n$ y $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $h(n) = 1$, existe una única función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$\begin{cases} f(m, 0) = h(m) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ f(m, n+1) = g(m, f(m, n), n) = m \cdot f(m, n) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

de esta manera queda definida la función $f(m, n) = m^n$.

4.4.

La función súper-exponencial $m \uparrow n$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ se define por medio de la recursión

$$\begin{cases} m \uparrow 0 = m. \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ m \uparrow (n+1) = m^{m \uparrow n}. \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Justificar la anterior recursión mediante la versión paramétrica del Teorema de Recusión.

Solución

Sean los conjuntos $A = P = \mathbb{N}$, y las funciones $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $g(m, n, k) = m^n$ cuya existencia se justifica en el anterior punto, y $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la forma $h(m) = m$. Gracias al teorema de recursión existe una única función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$\begin{cases} f(m, 0) := m \uparrow 0 = h(m) = m \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ f(m, n+1) := m \uparrow (n+1) = g(m, f(m, n), n) = m^{f(m, n)} = m^{m \uparrow n} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

queda entonces justificada la existencia de la función súper-exponencial mediante la versión paramétrica del Teorema de Recusión.

4.5.

Siguiendo la idea del ejercicio anterior, definir recursivamente la función súper-súper exponencial $m \uparrow\uparrow n$ y justificar la definición mediante la versión paramétrica del Teorema de Recusión.

Solución

Sean los conjuntos $A = P = \mathbb{N}$, y las funciones $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $g(m, n, k) = m \uparrow n$ cuya existencia se justifica en el anterior punto, y $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la forma $h(m) = m^m$. Gracias al teorema de recursión existe una única función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$\begin{cases} f(m, 0) := m \uparrow\uparrow 0 = h(m) = m^m \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ f(m, n+1) := m \uparrow\uparrow (n+1) = g(m, f(m, n), n) = m \uparrow f(m, n) = m \uparrow m \uparrow\uparrow n \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

queda entonces justificada la existencia de la función súper-exponencial mediante la versión paramétrica del Teorema de Recursión.

4.6.

Utilizar recursión básica, paramétrica o completa para definir las siguientes sucesiones numéricas. Indicar en cada caso las funciones g y h correspondientes al enunciado del teorema de recursión pertinente.

i) $a_0 = 0, a_n = 1 + 2 + \cdots + n$, para $n \geq 1$.

Tomar $A = \mathbb{N}$, $a = 0$ y $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(n, m) = n + (m + 1)$. Así por el Teorema de Recursión, existe única $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{cases} f(0) := 0 \\ f(n+1) := g(f(n), n) = f(n) + (n+1) \end{cases}$$

ii) $a_0 = 3, a_n = 3(3+1)(3+2)\cdots(3+n)$, para $n \geq 1$.

Tomar $A = \mathbb{N}$, $a = 3$ y $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(n, m) = n * (3 + m + 1)$. Así, por el Teorema de Recursión, existe única $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{cases} f(0) := 3 \\ f(n+1) := g(f(n), n) = f(n)(3 + n + 1) \end{cases}$$

iii) $\langle 1, 2, 2^2, 2^{2^2}, \dots \rangle$.

Tomar $A = \mathbb{N}$, $a = 1$ y $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(n, m) = 2^n$. Así, por el Teorema de Recursión, existe única $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{cases} f(0) := 1 \\ f(n+1) := g(f(n), n) = 2^{f(n)} \end{cases}$$

iv) $\langle 2, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{16}{81}, \frac{256}{6561}, \dots \rangle$.

Por medio del Teorema de Recursión completa, sea $g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$g(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \text{ es una sucesión finita de longitud } 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } t \text{ es una sucesión finita de longitud } 1 \\ (t_{n-1})^2 & \text{si } t \text{ es una sucesión finita de longitud } \geq 2 \end{cases}$$

Así existe $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(1) = \frac{2}{3} \\ f(n+1) = (f(n))^2, n \geq 2 \end{cases}$$

$$v) a_{m,n} = (0 + 1 + \dots + m)(0 + 1 + \dots + n)$$

Sea $A, P = \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $h(m) = 0$ y $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(x, y, z) = x(x+1)(z+1)/2 + y$. Así, por el Teorema de Recursión Paramétrica, existe única $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{cases} f(m, 0) := 0 \\ f(n+1) := g(m, f(m, n), n) = m(m+1)(n+1)/2 + f(m, n) \end{cases}$$

$$vi) a_{m,n} = (2^0 + 2^1 + \dots + 2^m)(3^0 + 3^1 + \dots + 3^n)$$

Sea $A, P = \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $h(m) = 2^{m+1} - 1$ y $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(x, y, z) = (2^{x+1} - 1)3^{z+1} + y$. Así, por el Teorema de Recursión Paramétrica, existe única $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{cases} f(m, 0) := 2^{m+1} - 1 \\ f(n+1) := g(m, f(m, n), n) = (2^{m+1} - 1)3^{n+1} + f(m, n) \end{cases}$$

4.7.

Sean dados un conjunto X y $h : X \rightarrow X$ una función. Definir recursivamente la composición

$$h^n = h \circ \dots \circ h \text{ } n - \text{ veces}$$

con $n \in \mathbb{N}$, de tal manera $h^0 = Id_X$, donde Id_x es la función identidad sobre X . Utilizar el Teorema básico de Recursión para justificar tal definición recursiva.

Demostración:

Tome $h \in X^X$ y defina las siguiente función:

$$g : X^X \times \mathbb{N} \rightarrow X^X \text{ tal que } g(x, z) = x \circ h.$$

Luego, gracias al teorema de recursividad básico, se tiene que existe una única función $f : \mathbb{N} \rightarrow X^X$ tal que:

$$\begin{aligned} f(0) &= Id_X \\ f(n+1) &= g(f(n), n) = f \circ h \end{aligned}$$

Donde se puede tomar como notación $f(n+1) = h^{n+1}$.

4.8.

Sean dados B un conjunto y R una relación sobre B .

(i) Definir recursivamente la composición:

$$R^n = R \circ \dots \circ R \text{ } n - \text{ veces}$$

con $n \in \mathbb{N}$, y usar el teorema básico de recursión para justificar la definición recursiva.

- (ii) Demostrar que $R^n \circ R^m = R^{m+n}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$
- (iii) Demostrar que si R es simétrica, entonces R^n también es simétrica, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (iv) Sean $R^t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$. Demostrar que R^t es una relación transitiva.
- (v) Demostrar que si S es una relación transitiva sobre A , tal que $Id_A \subseteq S$ y $R \subseteq S$, entonces $R^t \subseteq S$.
- (vi) $R^e = (R \cup R^{-1} \cup Id_A)^t$. Demostrar que R^e es una relación de equivalencia sobre A , y que si S es cualquier relación de equivalencia sobre A que contiene a R , entonces $R^e \subseteq S$. Esto quiere decir que R^e es la relación de equivalencia mas pequeña que contiene a R .

Demostración:

(i) Sea $R \in \wp(B \times B)$. Considere la función $g : \wp(B \times B) \times \mathbb{N} \rightarrow \wp(B \times B)$ tal que $g(x, y) = R \circ y$. Por teorema básico de recursividad, existe una única función $f : \mathbb{N} \rightarrow \wp(B \times B)$ tal que:

$$f(0) = Id_B$$

$$f(n+1) = g(f(n), n) = R \circ f(n)$$

(ii) Aplicando el principio de inducción matemática sobre $n \in \mathbb{N}$, fijando un $m \in \mathbb{N}$, se obtiene:

1. Caso base: $n=0$

$$R^0 \circ R^m = R^0 \circ R^m$$

$Id_B \circ R^m = R^m$ Por definición de $f(0)$ y por composición de relaciones con la identidad.

$$R^m = R^{m+0} \text{ Suma neutra en los naturales.}$$

$$R^{m+0} \circ R^{n+m} \text{ Valor base de } n.$$

2. Hipótesis de inducción: Suponga que hasta cierto $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$R^n \circ R^m = R^{n+m}$$

3. Paso inductivo:

$$R^{n+1} \circ R^m = R \circ (R^n \circ R^m)$$

Uso de la definición de la función recursiva. $R \circ R^{n+m}$ Uso de la hipótesis de inducción.

$$R^m = R \circ (R^n \circ R^m) = R^{n+m+1} \text{ Uso de la definición de la función recursiva.}$$

Luego $R^n \circ R^m = R^{n+m}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

(iii)

5. Recursión General y el Esquema Axiomático de Reemplazo

5.1.

Demostrar la existencia de la sucesión $\langle \phi, \wp(\phi), \wp(\wp(\phi)), \wp(\wp(\wp(\phi))), \dots \rangle$ y del conjunto $\{\phi, \wp(\phi), \wp(\wp(\phi)), \wp(\wp(\wp(\phi))), \dots\}$.

Demostración:

Usando el teorema de recursión general, se tiene que, dada la operación $G(x, y) = \wp(x)$ y el conjunto $a = \emptyset$, se dice que existe una única sucesión $\langle f(n) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$\begin{aligned} f(0) &= a = \emptyset \\ f(n+1) &= G(f(n), n) = \wp(f(n)) \end{aligned}$$

Por lo que la sucesión $\langle \phi, \wp(\phi), \wp(\wp(\phi)), \wp(\wp(\wp(\phi))), \dots \rangle$ existe. Además, el rango de la función f también existe, es decir, el conjunto $\{\phi, \wp(\phi), \wp(\wp(\phi)), \wp(\wp(\wp(\phi))), \dots\}$ existe.

5.2.

Construir un conjunto inductivo diferente de $\mathbb{N}$ y justificar su existencia.

Demostración:

Usando el teorema de recursión general, se tiene que, dada la operación $G(x, y) = S(x)$ y el conjunto $a = \mathbb{N}$, se dice que existe una única sucesión $\langle f(n) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$\begin{aligned} f(0) &= a = \mathbb{N} \\ f(n+1) &= G(f(n), n) = S(f(n)) \end{aligned}$$

Luego $Ran(f) = \{\mathbb{N}, S(\mathbb{N}), S(S(\mathbb{N})), S(S(S(\mathbb{N}))), \dots\}$ es conjunto. Luego $\mathbb{N} \cup Ran(f)$ es conjunto, gracias al axioma de pares y al axioma de uniones.

Note que $0 \in \mathbb{N}$, por lo que $0 \in \mathbb{N} \cup Ran(f)$. Note además que, dado $x \in \mathbb{N} \cup Ran(f)$ se tiene que:

1. Si $x \in \mathbb{N}$, entonces $S(x) \in \mathbb{N}$, ya que $\mathbb{N}$ es inductivo.
2. Si $x \in Ran(f)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = x$, luego $f(n+1) = S(f(n)) = S(x) \in Ran(f)$.

Concluyendo así que el conjunto $\mathbb{N} \cup Ran(f)$ es un conjunto inductivo.

5.3.

Demostrar que la versión básica del Esquema Axiomático de Separación se puede deducir del Esquema Axiomático de Reemplazo.

Demostración:

Para deducir el esquema axiomático de separación a partir del esquema axiomático de reemplazo, se considera la operación $G(x, y) = (\phi(x) \wedge x = y)$, donde $\phi(x)$ es una operación unitaria. Dado un conjunto A , entonces existe un conjunto B formado por los y que satisfacen $G(x, y)$, es decir:

$$\forall A \exists B \forall y [y \in B \longleftrightarrow \exists x (x \in A \wedge (\phi(x) \wedge x = y))]$$

lo cual es lógicamente equivalente a:

$$\forall A \exists B \forall x [x \in B \longleftrightarrow x \in A \wedge \phi(x)]$$

lo cual coincide con el esquema axiomático de separación.